Funkcja kwadratowa.

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Szczególnym przypadkiem funkcji kwadratowej jest funkcja $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jej wykresem jest parabola w wierzchołku w początku układu współrzędnych i ramionach skierowanych do góry dla $a > 0$, a do dołu dla $a < 0$. Jest to funkcja parzysta, zatem osią symetrii wykresu jest oś OY. Dla dowolnej funkcji kwadratowej mamy

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie wyróżnik równania kwadratowego $\Delta = b^2 - 4ac$. Stąd wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ można otrzymać przesuwając wykres funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor $[-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}]$. Ponadto wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, a jej osią symetrii jest prosta o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.

Łatwo zauważyć, że liczba miejsc zerowych omawianej (czyli liczba rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$) funkcji zależy od jej wyróżnika:

1. Dla $\Delta > 0$ funkcja ma dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Mamy wtedy $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
2. Dla $\Delta = 0$ funkcja ma jedno miejsce zerowe $x_1 = \frac{-b}{2a}$ (jest to pierwiastek podwójny odpowiedniego równania) oraz $f(x) = a(x - x_1)^2$.
3. Dla $\Delta < 0$ funkcja nie ma miejsc zerowych.

Funkcja kwadratowa nie jest różnowartościowa, nie jest też monotoniczna. Dla $a > 0$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, rosnąca w przedziale $(-\frac{b}{2a}, \infty)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $[-\frac{\Delta}{4a}, \infty)$. Dla $a < 0$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, malejąca w przedziale $(-\frac{b}{2a}, \infty)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.

Przykład 1. *Narysuj wykres funkcji*

a) $f(x) = 2x^2 - 2x - \frac{3}{2}$,

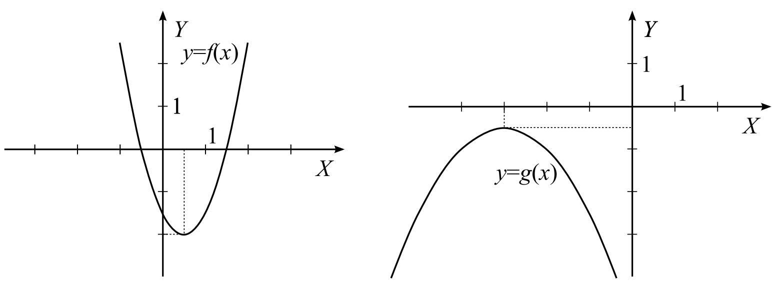
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$.

Rozwiązanie.

a) Wyróżnik $\Delta = 16$, więc wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, -2)$ i miejscach zerowych $x_1 = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}$.

b) Dla funkcji g mamy $\Delta = -1$, zatem wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji jest punkt $(-3, -\frac{1}{2})$, a ta funkcja nie ma miejsc zerowych.

Wykresy obu funkcji przedstawione są na rysunku.



Jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma miejsca zerowe x_1 i x_2, to

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2,$$

zatem zachodzą równości

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

– są to wzory Viete'a.

Rozwiązywanie równań i nierówności stopnia drugiego.

Przykład 2. *Napisz wzór funkcji f przyporządkowującej wartości parametru m liczbę różnych pierwiastków równania*

$$(m + 1)x^2 + (m - 2)x + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Dane równanie

1° ma dwa pierwiastki dla $m \neq -1$ i $\Delta > 0$;

2° ma jeden pierwiastek dla $m = -1$ (wtedy rozważane równanie jest równaniem liniowym $-3x + 1 = 0$) lub dla $m \neq -1$ i $\Delta = 0$;

3° nie ma pierwiastków dla $m \neq -1$ i $\Delta < 0$.

Ponieważ $\Delta = (m - 2)^2 - 4(m + 1) = m^2 - 8m = m(m - 8)$, wykresem funkcji $\Delta(m)$ jest parabola o miejscach zerowych 0 oraz 8 i ramionach skierowanych do góry. Stąd $\Delta > 0$ dla $m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$, a $\Delta < 0$ dla $m \in (0, 8)$. Ostatecznie mamy

$$f(m) = \begin{cases} 2 & \text{dla } m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (8, \infty), \\ 1 & \text{dla } m \in \{-1, 0, 8\}, \\ 0 & \text{dla } m \in (0, 8). \end{cases}$$

Przykład 3. *Zbadaj, dla jakiej wartości parametru m pierwiastki równania*

$$(m + 1)x^2 + (m - 2)x + 1 = 0$$

a) są różnych znaków,

b) spełniają zależność $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 5$.

Rozwiązanie.

a) Równanie musi mieć dwa różne pierwiastki, więc $m \neq -1$ oraz $\Delta > 0$. Pierwiastki równania są różnych znaków, gdy ich iloczyn jest ujemny. Z wzorów Viete'a mamy $x_1x_2 = \frac{1}{m+1}$. Musimy rozwiązać układ

$$\begin{cases} m & \neq & -1 \\ \Delta & > & 0 \\ \frac{1}{m+1} & < & 0 \end{cases}.$$

Korzystając z obliczeń z poprzedniego przykładu otrzymujemy

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ m \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty) \\ m \in (-\infty, -1) \end{cases}.$$

Częścią wspólną tych warunków jest $m \in (-\infty, -1)$.

b) Równanie musi mieć dwa pierwiastki (niekoniecznie różne), więc $m \neq -1$ oraz $\Delta \geqslant 0$. Stąd

$$(*) \qquad m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup [8, \infty).$$

Przekształćmy lewą stronę równania. Mamy

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2}.$$

Dalej z wzorów Viete'a możemy napisać

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a}}{(\frac{c}{a})^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

Musimy więc rozwiązać równanie

$$(m-2)^2 - 2(m+1) = 5.$$

Pierwiastkami równania $m^2 - 6m - 3 = 0$ są $m_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{2}$, $m_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$. Żaden z nich nie spełnia warunku $(*)$, więc powyższy warunek nie jest spełniony dla żadnego m.

.

Przykład 4. *Znajdź wartości parametru m, dla których nierówność*

$$x^2 - 2mx + 2m^2 + 3m + 2 \geqslant 0$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + 3m + 2$ jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Dana nierówność będzie spełniona dla każdego x, gdy funkcja f będzie miała co najwyżej jedno miejsce zerowe. Szukamy więc m spełniających warunek $\Delta \geqslant 0$. Mamy $\Delta = 4m^2 - 4(2m^2 + 3m + 2) = -4m^2 - 12m - 8$. Stąd

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 12m - 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (m+1)(m+2) \leqslant 0 \Leftrightarrow m \in [-2, -1].$$

Dzielenie wielomianów z resztą.

Przypomnijmy „szkolną” definicję wielomianu.

Definicja 1. *Wielomianem jednej zmiennej stopnia n o współczynnikach rzeczywistych nazywamy wyrażenie postaci $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu.*

Wielomianem zerowym nazywamy wielomian, którego wszystkie współczynniki są równe 0. Stopniem niezerowego wielomianu $W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ nazywamy liczbę n (zgodnie z definicją $a_n \neq 0$). Dodatkowo przyjmiemy, że stopień wielomianu zerowego to $-\infty$. Dwa wielomiany są równe, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach x.

Twierdzenie 1. *Niech $W(x)$ i $V(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i niech wielomian $V(x)$ będzie różny od wielomianu zerowego. Istnieje wtedy dokładnie jedna para wielomianów $Q(x), R(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełniająca warunki*

1. *$W(x) = V(x)Q(x) + R(x)$,*
2. *stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $V(x)$.*

Przykład 5. *Oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $2x^3 + 4x + 1$ przez $2x + 2$.*

Rozwiązanie. Mamy

$$2x^3 + 4x + 1 = x^2(2x + 2) - 2x^2 + 4x + 1,$$

$$-2x^2 + 4x + 1 = -x(2x + 2) + 6x + 1,$$

$$6x + 1 = 3(2x + 2) - 5,$$

czyli

$$2x^3 + 4x + 1 = x^2(2x + 2) - x(2x + 2) + 3(2x + 2) - 5 = (x^2 - x + 3)(2x + 2) - 5.$$

Ten algorytm dzielenia można zapisać podobnie do dzielenia pisemnego liczb

$$\begin{array}{rrrrl}
x^2 & -x & +3 & & \\
\hline
(2x^3 & & +4x & +1) & : (2x+2) \\
-2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & +4x & +1 & \\
 & 2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & 6x & +1 & \\
 & & -6x & -6 & \\
\hline
 & & & -5 &
\end{array}$$

Ostatecznie iloraz jest równy $Q(x) = x^2 - x + 3$, a reszta wynosi $R(x) - 5$.

Pierwiastki wielomianu. Krotność pierwiastka. Twierdzenie Bezoute'a. Równania i nierówności wielomianowe.

Niech $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ i niech $a \in \mathbb{R}$. Przez $W(a)$ będziemy oznaczali wartość $a_0 + a_1a + \ldots + a_na^n \in \mathbb{R}$.

Definicja 2. *Liczbę rzeczywistą a nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeśli $W(a) = 0$.*

Pierwiastek wielomianu $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ jest więc rozwiązaniem równania

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0.$$

Twierdzenie 2. *(Bézouta) Liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się bez reszty przez $x - a$.*

Definicja 3. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba $a \in \mathbb{R}$ jest **k-krotnym pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeśli wielomian $W(x)$ dzieli się bez reszty przez $(x - a)^k$, a przy dzieleniu $W(x)$ przez $(x - a)^{k+1}$ reszta jest różna od zera.*

Twierdzenie 3. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Wielomian n-tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków.*

Fakt 1. *Niech $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeśli $a \in \mathbb{Z}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $a|a_0$ w $\mathbb{Z}$.*

Zatem np. wszystkie pierwiastki całkowite wielomianu $6X^6 + X^5 - 2X^4 - 6X^2 - X + 2$ należą do zbioru $\{\pm 1, \pm 2\}$.

Fakt 2. *Niech $W(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $p|a_0$ i $q|a_n$.*

Stąd np. pierwiastków wymiernych wielomianu $6X^6 + X^5 - 2X^4 - 6X^2 - X + 2$ będziemy szukać w zbiorze $\{\frac{p}{q} : p \in \{\pm 1, \pm 2\}, q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}\}$.

Twierdzenie 4. *Każdy wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych stopnia $n \in \mathbb{N}$ można zapisać w postaci*

$$c(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_s)(x^2 + a_1 x + b_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_t x + b_t),$$

gdzie $c, x_1, \ldots, x_s, a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ oraz $s + 2t = n$, a wielomiany $x^2 + a_1 x + b_1, \ldots, x^2 + a_t x + b_t$ nie mają pierwiastków rzeczywistych. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Wniosek 1. *Każdy wielomian rzeczywisty, którego stopień jest liczbą nieparzystą ma pierwiastek w $\mathbb{R}$.*

Przykład 6. *Dla jakiej wartości parametru a wielomian $W(x) = 3x^4 - 12x^2 - 6x + a$ dzieli się bez reszty przez $x - 2$?*

Rozwiązanie. Z twierdzenia Bézouta wynika, że liczba 2 musi być pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, czyli $W(2) = 0$. Ponieważ $W(2) = 3 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + a = -12 + a$, rozwiązaniem zadania jest $a = 12$.

Przykład 7. *Wiedząc, że wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $x - 1$ daje resztę 2, a przy dzieleniu przez $x - 3$ daje resztę 4, oblicz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 3)$.*

Rozwiązanie. Ponieważ $W(x) = (x-1)Q_1(x)+2$ oraz $W(x) = (x-3)Q_2(x)+4$ dla pewnych wielomianów $Q_1(x), Q_2(x)$, musi być $W(1) = 2$ i $W(3) = 4$.
Szukana reszta z dzielenia przez $(x-1)(x-3)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego. Zatem szukamy liczb $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że

$$W(x) = (x - 1)(x - 3)Q(x) + ax + b$$

dla pewnego wielomianu $Q(x)$. Stąd mamy $W(1) = a + b$ oraz $W(3) = 3a + b$. Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} a + b & = & 2 \\ 3a + b & = & 4 \end{cases}$$

są liczby $a = 1$, $b = 1$. Stąd przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez $(x - 1)(x - 3)$ otrzymamy resztę $x + 1$.

Przykład 8. *Rozwiąż równania*

a) $x^4 - 16 = 0$,

b) $x^5 - 9x^3 + x^2 - 9 = 0$,

c) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$,

d) $3x^3 + x^2 - 7x - 5 = 0$.

Rozwiązanie.

a) Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia, żeby rozłożyć lewą stronę równania na czynniki

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0,$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0.$$

Stąd $x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x^2 + 4 = 0$. Ostatecznie $x = 2$ lub $x = -2$.

b) Rozłożymy lewą stronę równania na czynniki grupując wyrazy. Mamy

$$x^3(x^2-9)+(x^2-9)=0,$$

$$(x^2-9)(x^3+1)=0,$$

$$(x-3)(x+3)(x+1)(x^2-x+1)=0$$

– skorzystaliśmy ze wzoru skróconego mnożenia $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Zatem $x\in\{-3,-1,3\}$.

c) W tym równaniu mamy

$$x^4+2x^2+1-3x^3-3x=0,$$

$$(x^2+1)^2-3x(x^2+1)=0,$$

$$(x^2+1)(x^2+1-3x)=0.$$

Zatem $x^2+1=0$ lub $x^2-3x+1=0$. Pierwsze równanie nie ma rozwiązania w $\mathbb{R}$, pierwiastkami drugiego są liczby $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

d) W tym równaniu trudno jest zauważyć, jak odpowiednio pogrupować wyrazy, żeby rozłożyć lewą stronę na czynniki. Sprawdzimy, czy wielomian $W(x)=3x^3+x^2-7x-5$ ma pierwiastki całkowite. Z Faktu 1 wiemy, że pierwiastków całkowitych tego wielomianu należy szukać wśród dzielników wyrazu wolnego, czyli w zbiorze $\{\pm1,\pm5\}$. Mamy $W(1)=3+1-7-5\neq0$, stąd 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu. Dalej mamy $W(-1)=-3+1+7-5=0$, więc -1 jest pierwiastkiem wielomianu i $W(x)$ dzieli się przez $x+1$. Wykonajmy to dzielenie:

$$\begin{array}{rrrrl}
3x^2 & -2x & -5 & & \\
\hline
(3x^3 & +x^2 & -7x & -5) & :(x+1) \\
-3x^3 & -3x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^2 & -7x & -5 & \\
 & 2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & -5x & -5 & \\
 & & 5x & +5 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Zatem nasze równanie możemy zapisać w postaci

$$(x+1)(3x^2-2x-5)=0.$$

Rozwiązaniami równania $3x^2-2x-5=0$ są liczby -1 oraz $\frac{5}{3}$, zatem -1 jest podwójnym, a $\frac{5}{3}$ pojedynczym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Przykład 9. *Rozwiąż nierówności*

a) $x^3+x^2-4x-4<0$,

b) $x^3-x^2-x+1>0$,

c) $-x^5+x^3\leqslant0$.

Rozwiązanie. Tak jak w przypadku równań, najpierw trzeba znaleźć pierwiastki odpowiedniego wielomianu, czyli rozłożyć go na czynniki.

a) Mamy $x^2(x+1)-4(x+1)<0$, czyli $(x+1)(x^2-4)<0$, a więc

$$(x+1)(x-2)(x+2)<0.$$

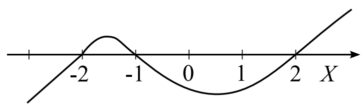
Stąd pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+x^2-4x-4$ są liczby $-2,-1,2$. Teraz musimy zbadać znak tego wielomianu

1° sposób. Możemy zrobić tzw. siatkę znaków, tzn. wypełnić następującą tabelkę znakami poszczególnych czynników wielomianu:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$W(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Zatem $W(x) < 0$ dla $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,2)$.

2° sposób. Nierówność wielomianową możemy także rozwiązać graficznie, tak jak to robiliśmy dla nierówności kwadratowych. Zaznaczamy na osi liczbowej pierwiastki wielomianu, a następnie patrzymy na znak współczynnika przy najwyższej potędze x. W naszym przypadku ten znak jest dodatni, a to oznacza, że $\lim_{x\to\infty} W(x) = \infty$, czyli zaczynamy rysować wykres funkcji wielomianowej z prawej strony ponad osią OX. Wszystkie pierwiastki wielomianu są pojedyncze, więc wykres będzie taki jak na rysunku.

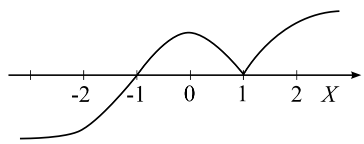


Możemy z niego odczytać, że nierówność $W(x) < 0$ jest prawdziwa dla $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,2)$.

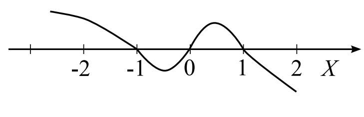
b) Mamy $x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$, więc wielomian $W(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy. W tym przypadku budując siatkę znaków musimy pamiętać, że znak $(x-1)^2$ dla $x \neq 1$ jest zawsze dodatni.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	$-$	$+$	$+$

Stąd $W(x) > 0$ dla $x \in (-1,1) \cup (1,\infty)$.
Rysując wykres funkcji wielomianowej musimy pamiętać, że gdy krotność pierwiastka jest parzysta, wykres „odbije się" od osi OX w odpowiednim miejscu.



c) Ponieważ $-x^5 + x^3 = -x^3(x^2-1) = -x^3(x-1)(x+1)$, wielomian $W(x) = -x^5 + x^3$ ma trzy pierwiastki, w tym jeden potrójny. Wykres funkcji wielomianowej jest następujący (tym razem zaczynami rysowanie z prawej strony poniżej osi OX, bo znak przy x^5 jest ujemny; znak czynnika x^3 jest taki sam, jak znak x).



Nierówność $W(x) \leqslant 0$ jest spełniona dla $x \in [-1, 0] \cup [1, \infty)$.

Zadanie 1. *Narysuj wykres funkcji*

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$,

b) $f(x) = x^2 - 3x$,

c) $f(x) = |x^2 - 9|$,

d) $f(x) = x^2 - 3|x| + 9$.

Zadanie 2. *Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji*

a) $f(x) = (2x + 1)(x - 2)$,

b) $g(x) = -x^2 + 4x + 4$,

c) $h(x) = x^2 + x$,

w przedziale $[-2, 2]$.

Zadanie 3. *Rozwiąż równanie*

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;

c) $-3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Zadanie 4. *Rozwiąż nierówność*

a) $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$,

b) $x^2 + 4 \geqslant -4x$,

c) $x^2 + x < 3 - x$,

d) $x(x - 2) > 5(2x - 7)$.

Zadanie 5. *Dla jakiej wartości parametru* m

a) równanie $(m + 1)x^2 - (m - 2)x + (1 - m) = 0$ *ma dokładnie jeden pierwiastek?*

b) równanie $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ *ma dwa różne rozwiązania?*

c) równanie $x^2 + 2(m+4)x + m^2 - 2m = 0$ *ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste jednakowych znaków?*

d) stosunek sumy pierwiastków równania $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ *do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą?*

e) równanie $mx^2 - 3(m + 1)x + m = 0$ *nie ma pierwiastków rzeczywistych?*

f) nierówność $(5 - m)x^2 - 2(1 - m)x + 2(1 - m) < 0$ *jest spełniona dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*?*

g) nierówność $x^2 - mx + m + 3 \geqslant 0$ *jest spełniona dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*?*

Zadanie 6. *Oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu* $W(x)$ *przez wielomian* $V(x)$*, jeśli*

a) $W(x) = 6x^4 + x + 1$, $V(x) = x^2 + 4$,

b) $W(x) = 3x^3 + x^2 + 1$, $V(x) = x + 4$, *c)* $W(x) = 8x^6 - x^2 + 1$, $V(x) = 2x^2 - 3$.

Zadanie 7. *Znajdź pierwiastki wielomianu*

a) $W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$;

b) $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$ *wiedząc, że jest podzielny przez dwumian* $x + 2$;

c) $3 \cdot 9^x - 82 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$,

d) $2^{3x} + 2^{2x+1} - 2^x + 2 < 0$,

e) $\frac{1}{25} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2+x-1} \leqslant 25$.

Zadanie 8. *Przy dzieleniu wielomianu* $W(x)$ *przez dwumian* $(x - 1)$ *otrzymano iloraz* $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ *oraz resztę* $R(x) = -5$. *Oblicz pierwiastki wielomianu* $W(x)$.

Zadanie 9. *Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki wielomianów* $W_1(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 2x + 1$, $W_2(x) = -4x^3 + 12x^2 + 3x - 3$ *i* $W_3(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Zadanie 10. *Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianów* $W_1(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$, $W_2(x) = 3x^3 + 12x^2 + 4x - 3$ *i* $W_3(x) = 4x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4$.

Zadanie 11. *Rozwiąż równanie*

a) $7x^3 - 11x^2 + 11x - 7 = 0$,

b) $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$,

c) $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$,

d) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$,

e) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$,

f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = 0$.

Zadanie 12. *Rozwiąż nierówność*

a) $x^3 < 2x^2 + 3x - 6$,

b) $x^3 + 6 < x$,

c) $x^4 + 2x > 3x^2$,

d) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geqslant 0$,

e) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \leqslant 0$,

f) $x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$.

Zadanie 13.

Zadanie 14.

Zadanie 15.