Logarytmy. Funkcje logarytmiczna i wykładnicza. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne.

Definicja 1. *Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy liczbę x spełniającą równanie $a^x = b$. Piszemy wtedy $x = \log_a b$.*

Innymi słowy
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

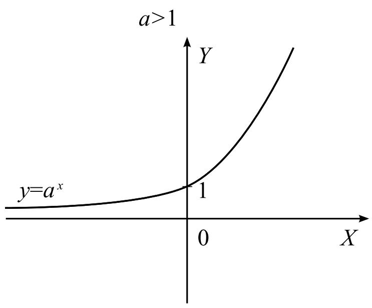
Logarytmy przy podstawie 10 nazywamy logarytmami dziesiętnymi i zamiast $\log_{10} x$ piszemy $\log x$ pomijając podstawę.

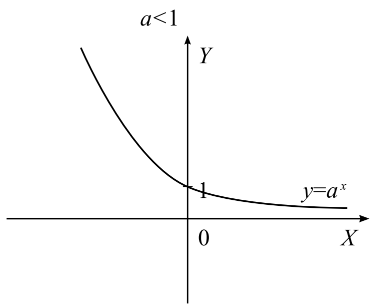
Twierdzenie 1. *(własności logarytmów) Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$ mamy*

1. $\log_a 1 = 0$,
2. $\log_a a^b = b$,
3. $a^{\log_a b} = b$,
4. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
6. $\log_a b^k = k \log_a b$ *dla dowolnego* $k \in \mathbb{R}$,
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Definicja 2. *Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ nazywamy funkcją wykładniczą.*

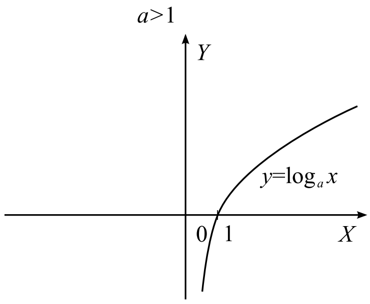
Poniższe rysunki przedstawiają wykresy funkcji wykładniczych w przypadku $a > 1$ oraz dla $0 < a < 1$.

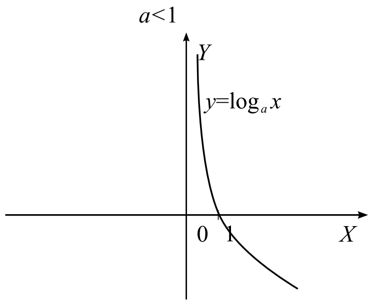




Definicja 3. *Funkcję* $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *określoną wzorem* $f(x)=\log_a x$, *gdzie* $a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ *nazywamy funkcją logarytmiczną.*

Poniższe rysunki przedstawiają wykresy funkcji logarytmicznych dla $a>1$ oraz dla $0<a<1$.





Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, tzn. jeśli $a^{x_1}=a^{x_2}$, to $x_1=x_2$. Ponadto jeśli $a>1$, to funkcja $f(x)=a^x$ jest rosnąca, a dla $0<a<1$ jest malejąca.

Podobne własności ma funkcja logarytmiczna, tzn. jeśli $\log_a x_1=\log_a x_2$, to $x_1=x_2$. Ponadto jeśli $a>1$, to funkcja $f(x)=\log_a x$ jest rosnąca, a dla $0<a<1$ jest malejąca.

Funkcja $f(x)=\log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $g(x)=a^x$; ich wykresy są symetryczne względem prostej $y=x$.

Przykład 1. *Oblicz* $\log_3 27\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $27\sqrt{3}=3^3\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{2}}$, więc na mocy definicji logarytmu $\log_3 27\sqrt{3}=\frac{7}{2}$.
Można także skorzystać z własności logarytmów

$$\log_3 27\sqrt{3}=\log_3 27+\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^3+\log_3 3^{\frac{1}{2}}=3\frac{1}{2}.$$

Przykład 2. *Oblicz* $2^{2\log_4 3+3\log_8 3}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$2^{2\log_4 3+3\log_8 3}=4^{\log_4 3}\cdot 2^{\log_{2^3}3^3}=3\cdot 2^{\log_2 3}=9.$$

Przykład 3. *Oblicz* $\log_{\sqrt[5]{13}}121\cdot\log_{11}\sqrt{13}$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z ostatniej z własności logarytmów wymienionych w twierdzeniu. Mamy

$$\log_{\sqrt[5]{13}}121\cdot\log_{11}\sqrt{13}=\frac{\log 121}{\log\sqrt[5]{13}}\cdot\frac{\log\sqrt{13}}{\log 11}=\frac{2\log 11}{\frac{1}{5}\log 13}\cdot\frac{\frac{1}{2}\log 13}{\log 11}=5.$$

Przykład 4. *Rozwiąż równania*

a) $8^{7x+5} - \left(\sqrt[3]{4}\right)^{9-x} = 0$,

b) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$,

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{11-x} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3x-1}$,

d) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2-3x} = \frac{1}{25}5^{3x}$.

Rozwiązanie.

a) Sprowadzimy najpierw potęgi do tych samych podstaw

$$2^{3(7x+5)} = 2^{\frac{2}{3}(9-x)}.$$

Teraz wystarczy porównać wykładniki

$$3(7x+5) = \frac{2}{3}(9-x).$$

Ostatecznie $x = -\frac{27}{65}$.

b) W tym równaniu wspólna podstawą jest 2

$$4 \cdot 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Podstawmy $t = 2^x$. Otrzymamy równanie kwadratowe

$$4t^2 - 10t + 4 = 0,$$

które ma dwa pierwiastki $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Równanie $2^x = \frac{1}{2}$ ma rozwiązanie $x = -1$, z warunku $2^x = 2$ dostajemy $x = 1$. Zatem dane równanie ma dwa rozwiązania $x = -1$ i $x = 1$.

c) Zauważmy, że $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$, czyli $\sqrt{3}-\sqrt{2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$. Stąd dane równanie możemy zapisać jako

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{11-x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-(3x-1)}.$$

Po porównaniu wykładników otrzymamy $x = -5$.

d) W tym równaniu przyjrzymy się wykładnikom. Mamy

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2-3x} = 5^{3x-2},$$

czyli

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{2-3x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x}.$$

Stąd po pomnożeniu stronami przez 5^{2-3x} otrzymamy

$$\left(5 \cdot \sqrt[3]{7}\right)^{2-3x} = 1,$$

a to oznacza, że $2 - 3x = 0$, czyli $x = \frac{2}{3}$.

Przykład 5. *Rozwiąż równania*

a) $\log_5(x^2-1)-\log_5(x+1)=3$,

b) $x^{\log_2\sqrt{x}-1}=\sqrt{8}$,

c) $\log_{x+5}9=2$,

d) $5\log_3 x-2\log_9 x=12$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną danego równania jest zbiór rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} x^2-1 & > & 0 \\ x+1 & > & 0 \end{cases},$$

czyli przedział $(1;\infty)$. Korzystając z własności logarytmu otrzymamy równanie

$$\log_5\frac{x^2-1}{x+1}=3,$$

czyli $\log_5(x-1)=3$, więc $x-1=125$. Ostatecznie rozwiązaniem równania jest $x=126$ (należy do dziedziny równania).

b) Dziedzina tego równania jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Zlogarytmujemy obie strony równania przy podstawie 2

$$\log_2 x^{\log_2\sqrt{x}-1}=\log_2\sqrt{8}.$$

Dalej możemy napisać

$$\left(\frac{1}{2}\log_2 x-1\right)\log_2 x=\frac{3}{2}.$$

Podstawimy $t=\log_2 x$ i rozwiążemy równanie $\frac{1}{2}t^2-t-\frac{3}{2}=0$. Mamy $t=-1$ lub $t=3$, a zatem $x=\frac{1}{2}$ lub $x=8$. Obie liczby należą do dziedziny równania, więc dane równanie ma dwa rozwiązania $x=\frac{1}{2}$, $x=8$.

c) Dziedziną równania jest zbiór tych x, dla których $x+5>0$ oraz $x+5\neq 1$, czyli suma przedziałów $(-5,-4)\cup(-4,\infty)$. Z definicji logarytmu dane równanie możemy zapisać w postaci $(x+5)^2=9$. Rozwiązaniami tego równania kwadratowego są $x=-2$ i $x=-8$. Drugie z rozwiązań nie należy do dziedziny. Ostatecznie rozwiązaniem jest $x=-2$.

d) Dziedzina tego równania jest zbiór $\mathbb{R}_+$. Skorzystamy z równości $\log_9 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\log_3 x$. Dane równanie możemy więc zapisać w postaci $4\log_3 x=12$, zatem $\log_3 x=3$, czyli $x=27$.

Przykład 6. *Rozwiąż nierówności*

a) $0,1^{5x-2} < 0,001,$

b) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x > -2,$

c) $\log_7 \log_{\frac{2}{3}}(x+11) > 0,$

d) $\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant 1.$

Rozwiązanie.

a) Sprowadzimy obie strony nierówności do tej samej podstawy

$$0,1^{5x-2} < (0,1)^3.$$

Teraz możemy porównać wykładniki pamiętając, że funkcja wykładnicza przy podstawie mniejszej od 1 jest malejąca. Otrzymamy $5x - 2 > 3$, czyli $x > 1$.

b) W nierówności

$$2^{2(x+\frac{1}{2})} - 5 \cdot 2^x > -2$$

podstawmy $t = 2^x$. Rozwiązaniami nierówności kwadratowej $2t^2 - 5t + 2 > 0$ są $t \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$. Nierówność $2^x < \frac{1}{2}$ daje nam $x < -1$, a z warunku $2^x > 2$ otrzymujemy $x > 1$. Zatem ostatecznie $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

c) Dziedziną nierówności jest zbiór rozwiązań nierówności $x + 11 > 0$. Mamy

$$\log_7 \log_{\frac{2}{3}}(x+11) > \log_7 1.$$

Po opuszczeniu zewnętrznego logarytmu otrzymamy $\log_{\frac{2}{3}}(x+11) > 1$. Dalej dostaniemy $\log_{\frac{2}{3}}(x+11) > \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}$ i znów możemy opuścić logarytmy pamiętając, że tym razem podstawa jest mniejsza od 1 i znak nierówności zmieni się na przeciwny $x + 11 < \frac{2}{3}$. Stąd $x < -10\frac{1}{3}$. Po uwzględnieniu dziedziny otrzymamy, że zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział$(-11, -10\frac{1}{3})$.

d) Wyznaczymy najpierw dziedzinę tej nierówności. Musi być $x^3 - \frac{1}{4}x > 0$, czyli $x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) > 0$, a więc $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. Ponadto podstawa logarytmu x musi spełniać warunki $x > 0$, $x \neq 1$. Zatem dziedziną jest suma przedziałów $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$. W nierówności

$$\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant \log_x x$$

znak po opuszczeniu logarytmów zależy od x. Rozważymy dwa przypadki.
1° $0 < x < 1$. Mamy $x^3 - \frac{1}{4}x \geqslant x$, czyli $x^3 - \frac{5}{4}x \geqslant 0$. Stąd

$$x(x - \frac{\sqrt{5}}{2})(x + \frac{\sqrt{5}}{2}) \geqslant 0,$$

zatem $x \in [-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, \infty)$. Po uwzględnieniu warunku $0 < x < 1$ i dziedziny nierówności, z rozważanego przypadku otrzymamy pusty zbiór rozwiązań.

2° $x > 1$. Rozwiążemy nierówność $x^3 - \frac{1}{4}x \leqslant x$. Postępując jak poprzednio otrzymamy $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{5}}{2}]$. Ponieważ $x > 1$, z tego przypadku otrzymamy $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

Rozwiązaniem danej nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przypadków, czyli przedział $(1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

Zadanie 1. *Oblicz*

a) $\log_2 4\sqrt[3]{16}$*;*

b) $\log_{0,1} 100 + \log_{\sqrt{5}} 125$*;*

c) $9^{\log_3 5}$*;*

d) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$*;*

e) $16^{\frac{1}{2}-\log_4 5} + 10^{3\log 2+1}$.

Zadanie 2. *Narysuj wykres funkcji*

a) $f(x) = 3^x$,

b) $f(x) = 3^{x-1}$,

c) $f(x) = |3^{x-1} - 2|$,

d) $f(x) = 3^{-x}$.

Zadanie 3. *Narysuj wykres funkcji*

a) $f(x) = \log_2 x$,

b) $f(x) = \log_2(x-1)$,

c) $f(x) = \log_2 4x$,

d) $f(x) = |\log_2 x| + 2$,

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Zadanie 4. *Czym się różni wykres funkcji* $y = \log x^4$ *od wykresu funkcji* $y = 4\log x$*?*

Zadanie 5. *Rozwiąż równania*

a) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$,

b) $(0,125)^x \cdot (\sqrt{2})^{x+1} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3x}$,

c) $4^{\sqrt[4]{x+23}} = 10 \cdot 2^{\sqrt[4]{x+23}} - 16$,

d) $\frac{(\sqrt[3]{5})^{\sqrt[3]{x}}}{4\sqrt{5}} = 1,25 \cdot 5^{\sqrt[3]{x}-\frac{5}{3}}$,

e) $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$,

f) $4^{x+1} + 3 \cdot 5^{2x} = 5^{2x+1} - 4^x$,

g) $2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = \sqrt{3 \cdot 2^{x+1} - 8}$.

Zadanie 6. *Rozwiąż równania*

a) $1 - \log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} = \log 30$,

b) $\log(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\log(2x-3) - \log 25$,

c) $\log(x + \frac{1}{2}) = \log\frac{1}{2} - \log x$,

d) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$,

e) $\frac{\log(\log x)}{\log(\log x^2-1)} = 2$,

f) $x + \log(5 - 2^{x+1}) - x\log 5 - \log 2 = 0$,

g) $3^{\log_3^2 x} + 6 \cdot x^{\log_3 x} = 21$,

h) $\log_{2\cos x}(9 - x^2) = 0$,

i) $\log\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots} = \log(4x - 15)$.

Zadanie 7. *Rozwiąż nierówności*

a) $0,25^{x^2} \cdot 2^{x+1} \leqslant 1$,

b) $5^{\frac{x+1}{x}} > \sqrt{5}$,

c) $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$,

d) $2^{3x} + 2^{2x+1} - 2^x - 2 < 0$,

e) $\frac{1}{25} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2+x-1} \leqslant 5$,

f) $\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$,

g) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$,

h) $\log_x 8 < 3$,

i) $\log_{x+4} x > -1$,

j) $2\log x + 4\log^2 x + 8\log^3 x + \ldots < \log^2 x$.

Zadanie 8. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność*

$$\frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log(n+1)}{n+1} > \frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n}{n}.$$

Zadanie 9. *Dla jakiej wartości x liczby $\log 2$, $\log(2^x - 1)$, $\log(2^x + 3)$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?*

Zadanie 10. *Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$.*

ODPOWIEDZI:

1. a) $3\frac{1}{3}$, b) 4, c) 25, d) 2, e) $80\frac{4}{25}$.
5. a) $x = 2$, b) $x = \frac{1}{15}$, c) $x = -22$ lub $x = 58$, d) $x = \frac{1}{64}$, e) $x = 0$, f) $x = \frac{1}{2}$, g) $x = 1$ lub $x = 2$.
6. a) $x = 6$, b) $x = 6$ lub $x = 14$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x = 0$ lub $x = 3$, e) brak rozwiązań, f) $x = -1$ lub $x = 1$, g) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 3$, h) brak rozwiązań, i) $x = 5$.
7. a) $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, b) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, c) $x \in [-1, 2]$, d) $x < 0$, e) $x \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [0, 1]$, f) $x \in (0, 9]$, g) $x \in (\frac{5}{4}, \infty)$, h) $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$, i) $x > 0$, j) $x \in (\frac{1}{\sqrt{10}}, 1)$.
9. $x = \log_2 5$.
10. Dziedziną funkcji jest przedział $(0, 8)$, a najmniejsza wartość funkcji to -8.