

## Wyrażenia i funkcje wymierne - zadania.

1. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ , jeśli

(a)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ,

(b)  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3-1}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$ .

2. Napisz równanie hiperboli, która jest obrazem hiperboli będącej wykresem funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{1}{x}$  przy przesunięciu o wektor a)  $[1, 1]$ , b)  $[3, -4]$ , c)  $[-2, -1]$ .

3. Wyznacz równania asymptot i współrzędne środka symetrii hiperbol będących wykresami podanych funkcji homograficznych:

(a)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ,

(b)  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{-2x+5}{4x-13}$ .

4. Napisz równanie hiperboli o podanych asymptotach, jeżeli wiadomo, że należy do niej punkt  $(0, 0)$

(a)  $x = 1, y = 1$

(b)  $x = -3, y = 4$ .

5. Naszkicuj wykres funkcji

(a)  $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ ,

(b)  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ ,

(d)  $f(x) = \frac{1}{3x+4}$ ,

(e)  $f(x) = \frac{x}{2x-3}$ ,

(f)  $f(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$ .

6. Jaki związek powinien zachodzić pomiędzy  $a, b, c$  i  $d$ , aby wyrażenie  $\frac{ax+b}{cx+d}$  przyjmowało tę samą wartość dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq -\frac{d}{c}$ .

7. Skróć wyrażenia wymierne:

(a)  $\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$

(b)  $\frac{2x^3-2y^3}{5x^2-5y^2}$

(c)  $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$ .

8. Wykonaj działania:

(a)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{2x-2y} + 1$

(b)  $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} + \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$

(c)  $\frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-2}{a^2+ab+b^2}$

(d)  $\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{2x+2y}{ax^2+2axy+ay^2}$

(e)  $\frac{a^4-x^4}{a^3-x^3} : \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$

- (f)  $\frac{ab+bc+ac+c^2}{ab-ac-bc+c^2} : \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$   
 (g)  $\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$   
 (h)  $\left[\left(1 - \frac{2}{1-3a}\right)\left(1 - \frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right] : \left[2\left(1 - 9a^2\right)\right]$

9. Czy następujące równania są równoważne w zbiorze  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych ?

- (a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$  oraz  $\frac{x^2}{x-3} = \frac{5x-6}{x-3}$ ,  
 (b)  $x^2 - 5x + 6 = 0$  oraz  $\frac{x^2}{x-4} = \frac{5x-6}{x-4}$ ,  
 (c)  $(x-1)^2 = x+1$  oraz  $\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x+1}$ ,

10. Dla jakich wartości  $a$  i  $b$  wyrażenia  $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$  i  $\frac{1}{x^2-8x+12}$  są równe?

11. Rozwiąż równania

- (a)  $\frac{2x+3}{x-4} = 5$ ,  
 (b)  $\frac{2x-1}{x+4} = 0$ ,  
 (c)  $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 1$ ,  
 (d)  $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} = \frac{x-5}{2} + \frac{x-4}{8}$ ,  
 (e)  $\frac{3x-2}{3} - \frac{9-2x}{3} = \frac{x+2}{2}$ ,  
 (f)  $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2x-2} = -\frac{5}{2}$ ,  
 (g)  $\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} + 1 = \frac{2}{x-1}$ ,  
 (h)  $\frac{6-x}{1-x^2} - \frac{x+3}{x-x^2} = \frac{x+5}{x+x^2}$ ,  
 (i)  $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6}$ ,

12. Rozwiąż nierówności

- (a)  $\frac{3x+2}{2x+3} > 1$ ,  
 (b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ ,  
 (c)  $\frac{x^2+x-45}{x-6} \leq \frac{3x+1}{2}$ ,  
 (d)  $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$ ,  
 (e)  $x + \frac{2}{x} > 3$ ,  
 (f)  $\frac{2x^3+3x^2+4x-5}{x^3+x+2} < 2$ .

13. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie

$$\frac{x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{x-1} = m$$

ma dwa pierwiastki, których suma jest mniejsza od  $m$ .

14. Rozwiąż równania

- (a)  $\frac{4|x|-3}{x} = x$ ,  
 (b)  $\frac{x+1}{|x|} = 2x+1$ ,  
 (c)  $\left|\frac{x-6}{x-2}\right| = x-1$ ,  
 (d)  $\left|\frac{1}{x+2}\right| = \left|\frac{2}{x-1}\right|$ .

15. Rozwiąż nierówności

- (a)  $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 2$ ,

$$(b) \left| \frac{2x-5}{x+3} \right| > 1,$$

$$(c) \left| \frac{x-1}{2x} - \frac{1}{x} \right| \leq 1,$$

$$(d) \left| \frac{x^2+2x-36}{x^2-4} \right| - 1 \geq 0.$$

16. Naszkicuj wykres funkcji

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} - 2.$$