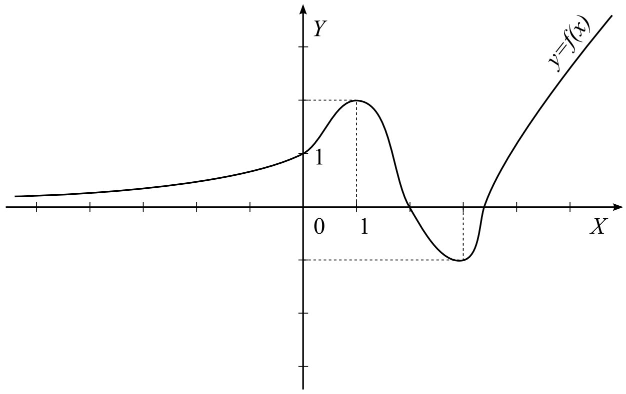
Przekształcanie wykresu funkcji.

Przykład 1. *Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.*



Narysuj wykres funkcji g będącej obrazem funkcji f

a) w przesunięciu o wektor $[2, 0]$,

b) w przesunięciu o wektor $[0, 1]$,

c) w przesunięciu o wektor $[2, 1]$,

d) w symetrii względem osi OX,

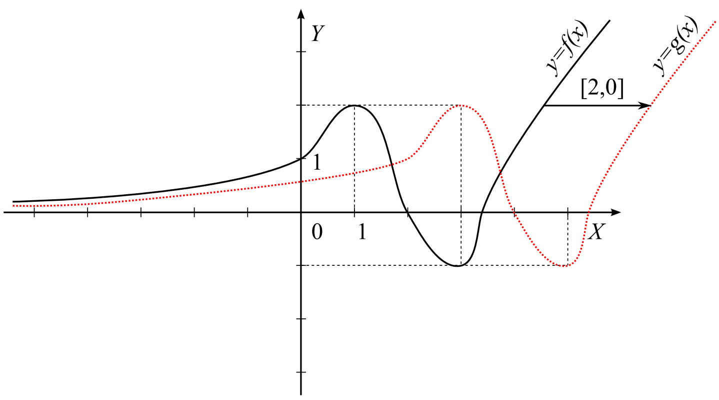
e) w symetrii względem osi OY,

f) w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Jakim wzorem jest opisana funkcja g*?*

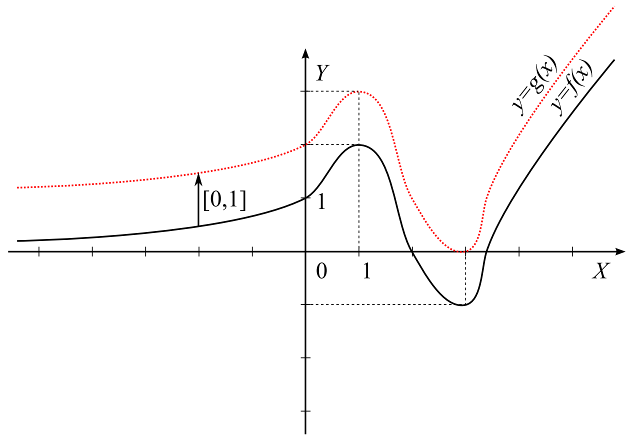
Rozwiązanie.

a) Przesuńmy najpierw wykres funkcji f o dany wektor.

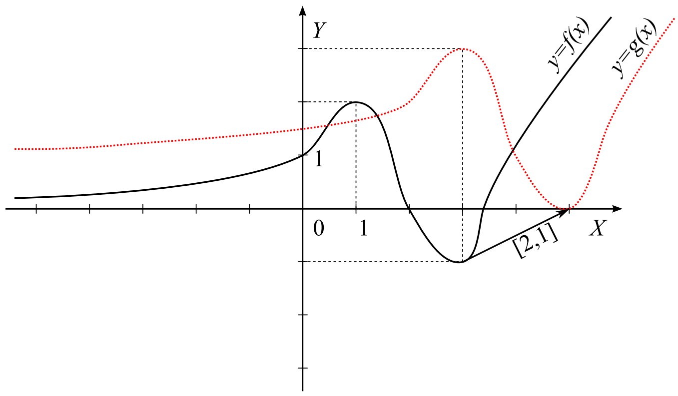


Mamy np. $g(3) = f(1)$, $g(5) = f(3)$. Funkcję g opisuje wzór $g(x) = f(x - 2)$.

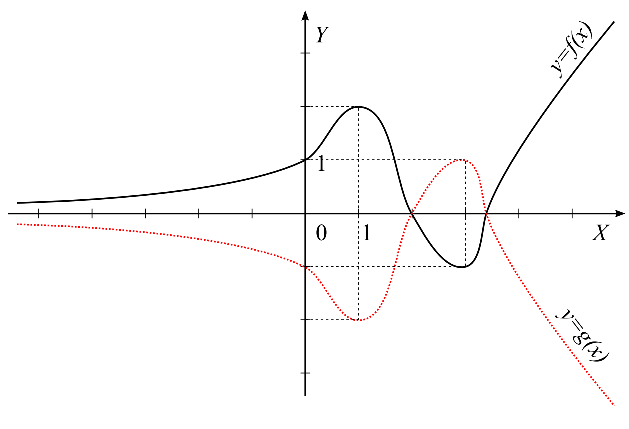
b) Po przesunięciu o wektor $[0, 1]$ otrzymamy funkcję $g(x) = f(x) + 1$.



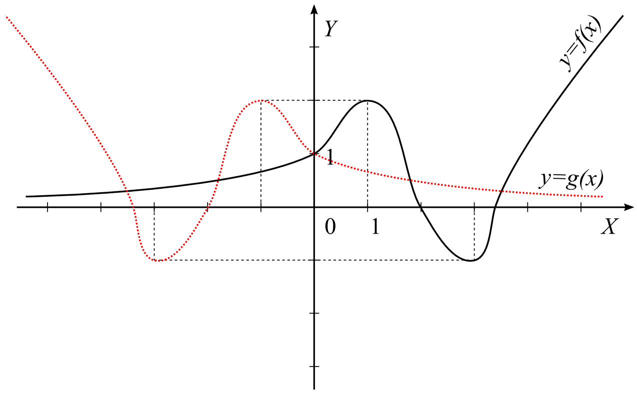
c) Po przesunięciu o wektor $[2,1]$ otrzymamy funkcję $g(x) = f(x-2)+1$.



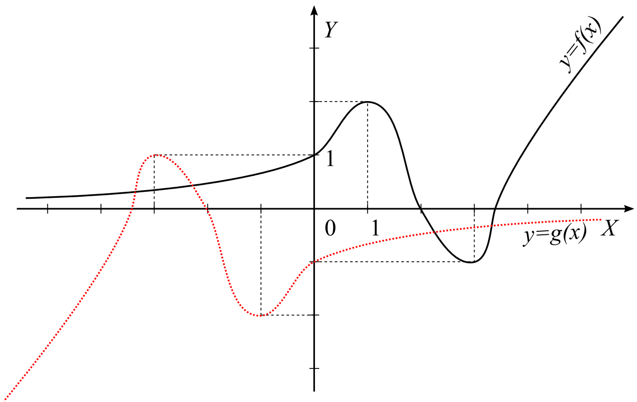
d) Obrazem funkcji f w symetrii względem osi OX jest funkcja $g(x) = -f(x)$.



e) Obrazem funkcji f w symetrii względem osi OY jest funkcja $g(x) = f(-x)$.

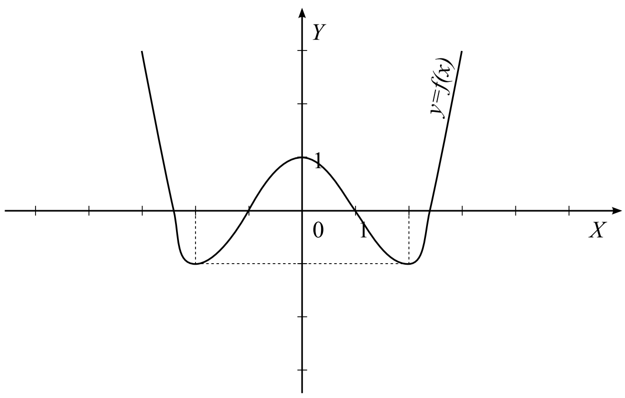


f) Obrazem funkcji f w symetrii względem początku układu współrzędnych jest funkcja $g(x) = -f(-x)$ (symetria środkowa względem początku układu współrzędnych jest złożeniem dwóch symetrii osiowych względem osi OX i OY).



Ogólnie, jeśli chcemy przesunąć wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$, to punkt P o współrzędnych (x_P, y_P) należący do wykresu funkcji f zostanie przesunięty do punktu P' o współrzędnych (x'_P, y'_P), gdzie $x'_P = x_P + a$, $y'_P = y_P + b$. Mamy $y_P = f(x_P)$, czyli $y'_P - b = f(x'_P - a)$. Stąd $y'_P = f(x'_P - a) + b$, zatem krzywa g będąca przesunięciem wykresu funkcji f o wektor $[a, b]$ opisana jest równaniem $y = f(x - a) + b$. W podobny sposób można wyprowadzić równania krzywych będących obrazami danej funkcji w symetriach względem osi układy współrzędnych i punktu O.

Przykład 2. *Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.*



Narysuj wykres funkcji

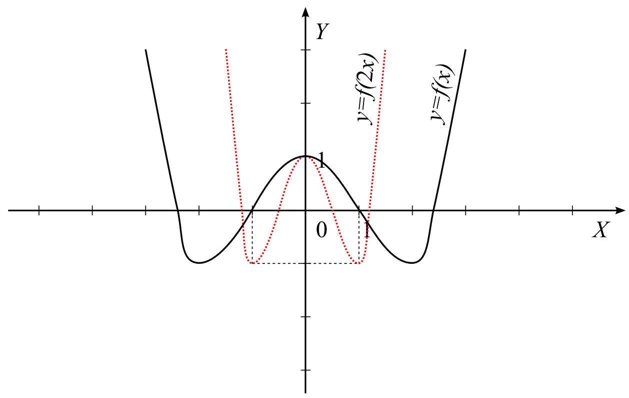
a) $y = f(2x)$,

b) $y = f(\frac{1}{2}x)$,

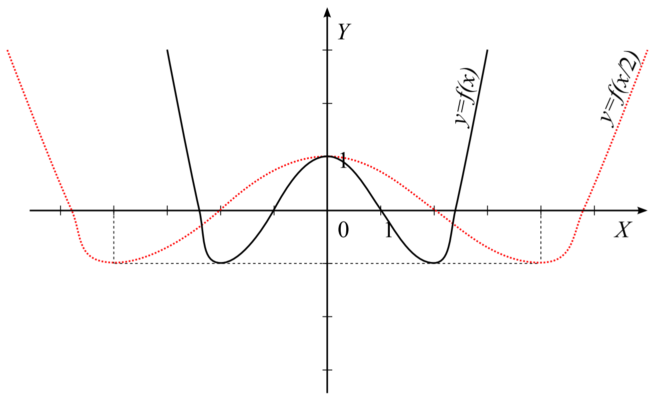
c) $y = 2f(x)$.

Rozwiązanie.

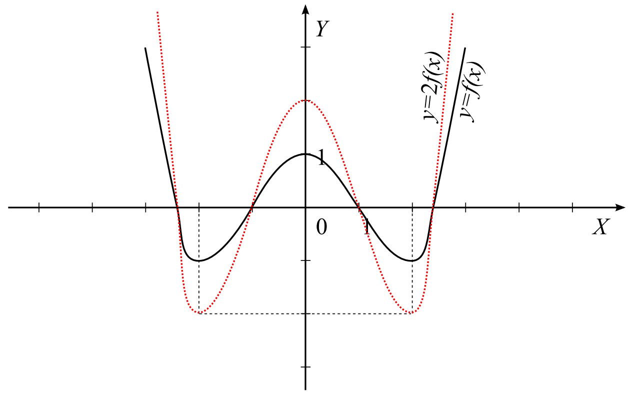
a) Łatwo zauważyć, że czynnik 2 przy x odpowiada za "ściśnięcie" wykresu.



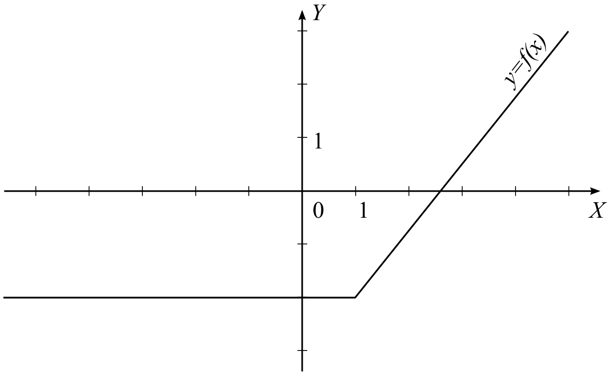
b) Czynnik $\frac{1}{2}$ przy x powoduje "rozciągnięcie" wykresu wzdłuż osi OX.



c) W tym przypadku przez 2 mnożymy wartości funkcji.

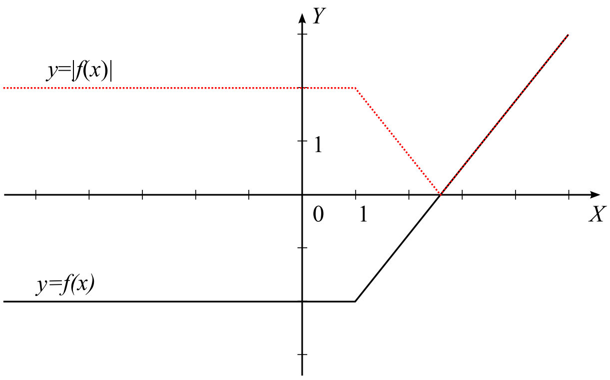


Przykład 3. *Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.*

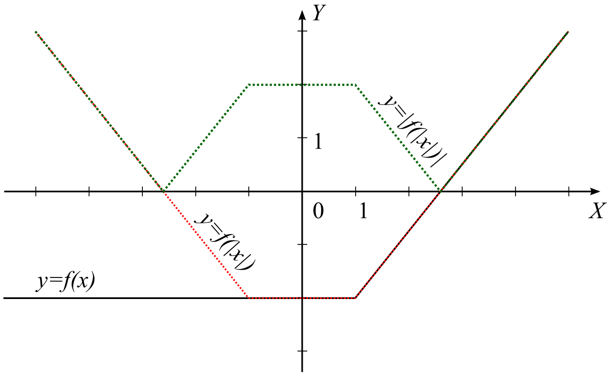


Narysuj wykres funkcji $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ oraz $y = |f(|x|)|$.

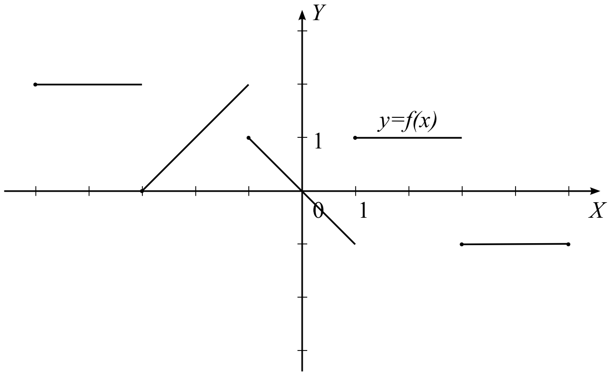
Rozwiązanie. Narysujmy najpierw wykres funkcji $y = |f(x)|$. Tam, gdzie funkcja f przyjmowała wartości nieujemne, wykres funkcji $y = |f(x)|$ pokrywa się z wykresem funkcji f. Dla tych x, dla których $f(x) < 0$ mamy $|f(x)| = -f(x)$, czyli musimy zastąpić odpowiednią część wykresu jego obrazem w symetrii względem osi OX.



Pozostałe dwa wykresy są na kolejnym rysunku. Wykres funkcji $f(|x|)$ dla $x \geqslant 0$ pokrywa się z wykresem $f(x)$. Dla $x < 0$ mamy $f(|x|) = f(-x)$, więc ta część wykresu jest obrazem funkcji f w symetrii względem osi OY.

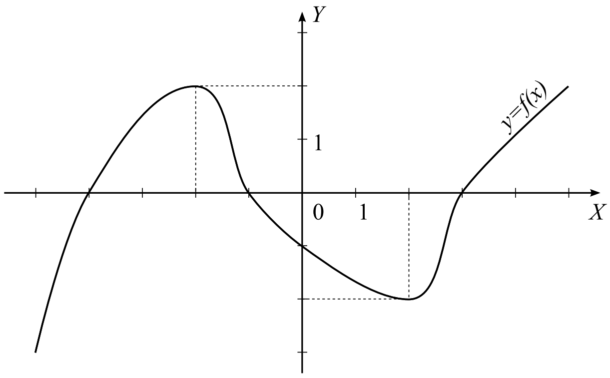


Zadanie 1. *Dana jest funkcja, której dziedziną jest przedział* $[-5, 5]$.



Narysuj wykresy funkcji $y = 2f(x)$, $y = 2f(|x|)$, $y = 2f(|x|) - 3$, $y = |2f(|x|) - 3|$.

Zadanie 2. *Dana jest funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych*



Narysuj wykresy funkcji $y = |-f(-3x)+2|$, $y = f(|x|+1)-1$,$y = -f(-|x|-3)$, $y = |2f(|x|)-3|$.